Construction et Classification de certaines solutions algébriques des systèmes de Garnier

Karamoko DIARRA
Université de Bamako, Département de Maths et Info
diarak2005@yahoo.fr

Résumé : Les déformations isomonodromiques d'équations fuchsiennes d'ordre 2 sur la sphère de Riemann sont paramétrées par les solutions des systèmes de Garnier. Le but principal est de construire des solutions algébriques exotiques, i.e. correspondant à des déformations d'équation fuchsienne à monodromie Zariski dense dans $PGL(2,\mathbb{C})$.
Précisément, nous classifions toutes les solutions algébriques (complètes) non élémentaires construites par la méthode de pull-back de Doran-Kitaev : elles se déduisent des déformations isomonodromiques données en tirant en arrière une équation fuchsienne donnée E par une famille de revêtements ramifiés Φ_t.

1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FUCHSIENNE AVEC $2N+3$ PÔLES

Considérons équation différentielle de type fuchsienne : (E) : $\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\frac{du}{dx} + g(x)u = 0$; avec

$$\begin{cases} \text{pôles} : x = & 0 & 1 & t_i & q_i & \infty \\ \text{exposants} : & \theta_0 & \theta_1 & \theta_{t_i} & 2 & \theta_\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \frac{1-\theta_0}{x} + \frac{1-\theta_1}{x-1} + \sum_{i=1}^N \frac{1-\theta_{t_i}}{x-t_i} + \sum_{i=1}^N \frac{1-2}{x-q_i} \\ g = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} - \sum_{i=1}^N \frac{H_i}{x-t_i} + \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{x-q_i} \end{cases}$$

t_i sont des points singuliers non apparents de (E) et q_i des singularités apparentes.

2 DÉFORMATION ISOMONODROMIQUE

D'aprés un résultat de Fuchs-Malmquist, une déformation $t \mapsto (q_i(t), L_i(t))$ de l'équation différentielle (E) est isomonodromique si et seulement si elle satisfait $\begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial t_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_i} \end{cases}$

2.1 Système de Garnier

Le système ci-dessus déduit un système d'équation différentielle d'ordre 2 non linéaire de rang N appelé système de Garnier de rang N. Les solutions générales du système sont très transcendantes. Cette transcendance augmente avec le rang du système. Mais elle a aussi certaines solutions algébriques.
Les singularités apparentes q_i de l'équation (E) sont, fonctions rationnelles en t_i, des solutions du système de Garnier.

2.2 Solutions algébriques de Garnier

Solutions algébriques déjà connues Si le rang du système est égal à 1 le système de Garnier devient l'équation différentielle de Painlevé VI (voir [6]). Toutes ces solutions sont connues par les travaux de nombreuses personnes (surtout Doran et Kitaev). Elles sont reparties comme suit :
- 3 familles à un ou deux paramètres complexes,
- une famille discrète (paramétrée par les points de torsion sur une courbe elliptique),
- 45 solutions sporadiques

On retrouve toutes celle-ci (à modulo symétrie d'Okamoto près) par la méthode Doran-Kitaev i.e par pull-back (pas l'importe quel).

2.3 Nouvelles solutions algébriques du système Garnier de rang $N \geq 2$

Cherchons les couples $(E, \phi : \mathbb{P}^1_x \times S \to \mathbb{P}^1_z)$ où E est une équation fuchsienne fixée sur $\mathbb{P}^1_z$, $\phi_s := \phi(\cdot, s) : \mathbb{P}^1_x \to \mathbb{P}^1_z$ une famille de Hurwitz (revêtements ramifiés à type topologique fixé) paramétrée par une surface irréductible S t.q. :

1. $E_s := (\phi_s)^*E$ isomonodromique et fuchsienne,
2. monodromie de E_s Zariski dense dans $PGL(2,\mathbb{C})$
3. # pôles non apparents de $E_s = N+3$
4. pôles : $S \to Sym^{N+3}(\mathbb{P}^1_x)/_{PGL(2,\mathbb{C})}$ dominante.

On obtient notre résultat principal

Théorème 1 *Si E est une équation hypergéométrique à monodromie non élémentaire dont*

les monodromies locales sont d'ordre (p_0, p_1, p_∞) *et si* $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *est une famille à* N *paramètres de revêtements ramifiés tel que* $\phi_t^* E$ *a* $N+3$ *singularités non apparentes, alors on est dans la liste :*
pour $N = 2$ *on a*

$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta)$, $deg(\phi_s) = 4$, $E_s(\frac{1}{3}, \theta, \theta, \theta, \theta)$

$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta)$, $deg(\phi_s) = 6$, $E_s(\theta, \theta, \theta, \theta, 2\theta)$

$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$, $deg(\phi_s) = 12$, $E_s(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$

pour $N = 3$

$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \theta)$, $deg(\phi_s) = 6$, $E_s(\theta, \theta, \theta, \theta, \theta, \theta)$

Pour $N \geq 4$ *il n'y a plus d'autres solutions algébriques du système de Garnier construites par la méthode Doran-Kiatev.*

3 EXEMPLE : REVÊTEMENT RAMIFIÉ DE DEGRÉ 4

Son type topologique est donné par la configuration

$$(2+2; 3+1; 1+1+1+1);$$

où les éléments de la première boîte sont des points au dessus de 0, ceux de la deuxième les points au dessus de 1 et la troisième des points au dessus de ∞. Son expression normalisée

$$\phi_s(x) = \frac{-d^3}{c^2} \frac{(x^2+bx+c)^2}{(x-d)^3};$$

avec $d = \frac{1}{1-u^2}$, $b = (u^3-1)c - 1$

t_1 et t_2 sont solutions de l'équation $t^2 - st + p = 0$, $p = -2c^2u^3 - c^2 + 2c + 3c^2u^2$, $s = -c^2 + 3c^2u^2 - 3c^2u^4 + c^2u^6 - 2cu^3 + 2c + 1$.

3.1 Solutions algébriques explicites de Garnier

$t_1(U,V) = -\frac{1}{52}(353+9\alpha)(-4\alpha U^2 + 2UV^2 - 2U - V^2 + 1 + 13U^2V^2 + 11U^2 + 4\alpha UV^2 - 4\alpha U - 2\alpha V^2 + 2\alpha)U(2V-1+\alpha)(2V+1-\alpha)(UV+U+\alpha V-\alpha)^2(UV-U+\alpha V+\alpha)^2/((U+1)(U^2V^2 - U^2 - 2\alpha UV^2 - 2\alpha U + V^2 - 1)(V+1)(V-1)(\alpha V - 2V + \alpha - 2 + 7UV + U - 4\alpha U)^2(\alpha V - 2V + 2 - \alpha + 7UV - U + 4\alpha U)^2)$,

$t_2(U,V) = \frac{1}{52}(9\alpha - 353)(-V^2 + 1 + 13U^2V^2 + 11U^2 + 4\alpha U^2 - 2UV^2 + 2U + 2\alpha V^2 - 2\alpha + 4\alpha UV^2 - 4\alpha U)U(2V-1-\alpha)(2V+1+\alpha)(UV+U+\alpha V-\alpha)^2(UV-U+\alpha V+\alpha)^2/((U-1)(U^2V^2 - U^2 - 2\alpha UV^2 - 2\alpha U + V^2 - 1)(V+1)(V-1)(2V+\alpha V-2-\alpha+7UV-U-4\alpha U)^2(2V+\alpha V+2+\alpha+7UV+U+4\alpha U)^2)$

$q_1(U,V) = -\frac{7}{2}(UV-U+\alpha V+\alpha)U(2V+1-\alpha)(2V+1+\alpha)(UV+U+\alpha V-\alpha)^2/((U^2V^2 - U^2 - 2\alpha UV^2 - 2\alpha U + V^2 - 1)(\alpha V - 2V + 2 - \alpha + 7UV - U + 4\alpha U)(2V+\alpha V-2-\alpha+7UV-U-4\alpha U)(V+1))$

$q_2(U,V) = -\frac{7}{2}(UV+U+\alpha V-\alpha)U(2V-1+\alpha)(2V-1-\alpha)(UV-U+\alpha V+\alpha)^2/((U^2V^2 - U^2 - 2\alpha UV^2 - 2\alpha U + V^2 - 1)(2V+\alpha V+2+\alpha+7UV+U+4\alpha U)(\alpha V - 2V + \alpha - 2 + 7UV + U - 4\alpha U)(V-1))$;
avec $\alpha^2 + 3 = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. V. Andreev and A. V. Kitaev, Transformations $RS_4^2(3)$ of the Ranks ≤ 4 and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé Equation, *Comm. Math. Phys.* **228** (2002), p.151 − 176.

[2] P. Boalch, The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI, *J. Reine Angew. Math.* **596** (2006), p. 183 − 214.

[3] P. Boalch, Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem, *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics,* vol. **9** (2006) p. 85 − 112.

[4] G. Cousin, Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI, arxiv : math/1201.2755v2, (2012).

[5] C. F. Doran, Algebraic and Geometric Isomonodromic Deformations, *J. Differential Geometry* ***59*** (2001), 33-85.

[6] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, S. Yoshida, From Gauss to Painlevé : A Modern Theory of Special Functions, *Braunschweig : Vieweg*, (1991), 347pages.

[7] A. V. Kitaev, Grothendieck's Dessin d'Enfants, Their Deformations and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé and Gauss Hypergeometric Equations, *Algebra i Analiz* ***17***, n° . 1 (2005), p.224−273.

[8] A. V. Kitaev, Remarks Towards the Classification of $RS_4^2(3)-$Transformations and Algebraic Solutions of the Sixth Painlevé Equation, Sémin. Congr., 14, *Soc. Math. France*, Paris, (2006), p. 199 − 227.